Revista Brasileira de História da Matemática - Vol. 14 nº 28 - pág. 47-61
Publicação Oficial da Sociedade Brasileira de História da Matemática
ISSN 1519-955X

DE ORESME A DIRICHLET: UM BREVE HISTÓRICO DO DESENVOLVIMENTO DAS FUNÇÕES

Davidson Paulo Azevedo Oliveira
Instituto Federal de Minas Gerais – Campus Ouro Preto – IFMG – Brasil

Milton Rosa
Universidade Federal de Ouro Preto – UFOP – Brasil

Marger da Conceição Ventura Viana
Universidade Federal de Ouro Preto – UFOP – Brasil

(aceito para publicação em abril de 2014)

Resumo

Este artigo teórico apresenta uma breve imersão na história das funções abrangendo a definição atual de Dirichlet por meio de sua concepção a partir das representações gráfica de Oresme e tabular dos Babilônios. Assim, discutimos os estágios da evolução histórica da linguagem algébrica, aprofundando-se na escrita retórica, sincopada e simbólica. Nesse direcionamento, do ponto de vista histórico, a distinção entre constantes e variáveis também é necessário. Argumentamos que o desenvolvimento das funções vem sendo elaborado desde 4.000 a.C. até os tempos atuais, quando a sua definição contemporânea foi proposta no século XIX.

Palavras-chave: História, Funções, Oresme, Linguagem Algébrica, Representações Gráficas.

[FROM ORESME TO DIRICHLET: A BRIEF HISTORY OF THE DEVELOPMENT OF THE FUNCTIONS]

Abstract

This theoretical article presents a brief immersion in the history of functions covering its current definition by Dirichlet and with its conception in Oresme's graphic representation and a Babylonian table representation. In order to do so, we discuss the historical development of stages of algebraic language by deepening its rhetoric, syncopated and symbolic writings. In this way, from the historical point of view, the distinction between constants and variables is also necessary. The development of functions has been elaborated since 4.000 BC to the present, which was based on a function contemporary definition proposed in the 19^{th} century.

Keywords: History, Functions, Oresme, Algebraic Language, Graphic Representations.

Introdução

No decorrer da história, o desenvolvimento do conceito de funções foi um processo demorado e não sistematizado. Esse conceito, um dos mais importantes da Matemática, surgiu como um instrumento matemático indispensável para o estudo quantitativo dos fenômenos naturais (PONTE, 1990). No entanto, apesar desse conteúdo ser abordado predominantemente de maneira algébrica no currículo matemático, historicamente, o caráter variacional das funções foi, primeiramente, desenvolvido a partir de tabelas de valores, gráficos e equações, que buscavam determinar relações funcionais implícitas no contexto dos problemas a serem resolvidos pelos membros de civilizações distintas.

Este artigo teórico apresenta uma breve imersão na história das funções, porém, não se aprofunda na discussão das diversas definições que surgiram no decorrer da história, abrangendo somente como a definição atual foi concebida a partir da sua representação gráfica e tabular. Essa abordagem possibilita a verificação histórica de que os fenômenos observados no cotidiano, com as suas regularidades e dependências, podem ser expressos por meio das ferramentas matemáticas denominadas funções. Assim, durante a história, essas ferramentas foram exploradas e desenvolvidas a partir da ideia de correspondência biunívoca entre conjuntos, nos quais as variáveis dependentes e independentes, as leis quantitativas, as notações e as representações gráficas surgiram, paulatinamente, para compor esse importante conceito matemático.

Conhecendo o Desenvolvimento Histórico das Funções

De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática – PCNs (BRASIL, 2006), o tema Álgebra: números e funções é um dos três grupos nos quais os conteúdos matemáticos foram divididos para facilitar o ensino e a aprendizagem em Matemática. O principal objetivo desse tema é contemplar o estudo do conceito de função, porém, vinculando-o com o raciocínio algébrico, fornecendo, dessa maneira, a natureza algébrica para esse conteúdo.

Então, existe a necessidade de que os professores conheçam, de uma maneira sucinta, a história das representações das funções, inicialmente a representação tabular desenvolvida pelos Babilônios e, também, algumas conceituações que surgiram a partir da definição proposta por Johann Bernoulli em 1718, que culminou com a definição de Dirichlet em 1837.

Assim, para que possamos iniciar o estudo do desenvolvimento histórico das funções, vários autores como Bell (1992), Boyer (1996), Cajori (2007) e Katz (2007) foram selecionados para verificarmos como o conceito, a notação, e outras representações de função foram, historicamente, sendo desenvolvidas, criadas e utilizadas pela humanidade. Diante dessa perspectiva, é importante termos consciência que:

> *Se simplesmente aceitarmos a opinião de uma única pessoa a respeito de determinado assunto, muitas vezes esta visão pode distorcer a verdade histórica e a sua transmissão para gerações futuras pode ser comprometida. Este é um grande perigo que está inerente às investigações científicas que possuem como base somente a oralidade* (NOBRE, 2005, p. 541).

Então, para que possamos discutir sobre a escrita algébrica das funções, recorremos, primeiramente, à escrita de sua linguagem simbólica, pois o simbolismo algébrico foi fundamental para o desenvolvimento dos conteúdos matemáticos. Por outro lado, a ausência desse simbolismo pode ser considerado responsável pelo atraso do desenvolvimento de algumas áreas de estudo da Matemática (BONETTO, 1999). Por exemplo, "um fator que pode ter impedido Oresme de conseguir maiores avanços no desenvolvimento da geometria analítica está, novamente, no argumento de que não dispunha de recursos algébricos mais sofisticados" (BONETTO, 1999, p. 48) para resolver as situações-problema enfrentadas no cotidiano.

Nesse direcionamento, é necessário comentarmos, brevemente, sobre Nicole Oresme (1323-1382), um importante pensador e gênio intelectual do século XIV, que estudou os movimentos uniforme e uniformemente variado, deduziu o teorema da velocidade média e auxiliou o desenvolvimento da conceituação e notação das funções, sobretudo, de sua representação gráfica. A figura 1 mostra mostra uma ilustração de Oresme.

Figura 1: Nicole Oresme (1323-1382)

Oresme foi um economista, matemático, físico, astrônomo, filósofo, psicólogo, musicólogo, teólogo, tradutor e, também, conselheiro do rei Carlos V da França e Bispo de

Lisieux, sendo considerado como um dos principais fundadores e divulgadores das ciências modernas.

Diante desse contexto, iniciamos esse artigo por meio de um estudo da linguagem algébrica e de seus estágios da evolução histórica conforme sugeridos por Nesselmannem em 1842. Posteriormente, discutiremos sobre a origem do conceito de função e de suas noções básicas, que foram desenvolvidas por diversos povos e civilizações, desde a origem do pensamento funcional com os Babilônios em, aproximadamente, 4000 a.C. até a definição atual de função desenvolvida por Dirichlet, no século XIX.

Estágios da Evolução Histórica da Linguagem Algébrica

De acordo com a classificação proposta por Nesselmann em 1842, o estudo do desenvolvimento da linguagem algébrica é classificado em três estágios: retórico, sincopado e simbólico (EVES, 1962; SCARLASSARI e MOURA, 2006). Apesar de haver outras classificações para a linguagem algébrica (KATZ, 2007; MOURA e SOUSA, 2005), preferimos utilizar a classificação de Nesselmann, pois se refere somente aos estágios do desenvolvimento da escrita da linguagem algébrica enquanto que, se examinarmos o pensamento algébrico, existem quatro estágios a serem considerados, como por exemplo, o geométrico, a resolução de equações, a dinâmica funcional e a álgebra abstrata (KATZ, 2007). Dessa maneira, as fases propostas por Nesselmann "constituem apenas a evolução de notações (...), [pois] não se considera todo o processo e o produto do pensar humano" (MOURA e SOUSA, 2005, p. 14). Nesse sentido, focalizaremos a discussão proposta nesse artigo nos três estágios estudados por Nesselmann, pois o seu principal objetivo está relacionado com o estudo da evolução da notação de funções e da linguagem algébrica.

Estágio Retórico

Nesse estágio, a linguagem matemática era escrita em palavras ou sentenças e, também, por extenso, sendo uma linguagem discursiva que não utilizava os símbolos matemáticos e nem as suas abreviações (KATZ, 2007). Por exemplo, a escrita retórica pode ser encontrada nos trabalhos de Al-Khowarizmi que foi utilizada para a resolução de equações. Dessa maneira, uma equação quadrática é escrita em Latim como "census et quinque radices equantur viginti quatuor ou o quadrado do desconhecido (consus) e cinco desconhecidos (radices) é igual a vinte e quatro, que é $x^2 + 5x = 24$" (BELL, 1992, p. 129).

A escrita retórica também foi utilizada por Diofante de Alexandria (200-284), um famoso matemático greco-alexandrino, conhecido como o Pai da Álgebra[1] , que contribuiu de maneira significativa para a evolução da Matemática ao iniciar o processo de sincopação da álgebra grega (EVES, 1992). Contudo, apesar dos avanços rumo a álgebra sincopada, a

[1]Alguns matemáticos discordam em relação ao fato de Diofante ser considerado como o pai da álgebra, pois o seu trabalho não teria sido mais algébrico do que os trabalhos desenvolvidos pelos Babilônios e por Arquimedes. Além disso, a data sugerida para a época em que Diofante viveu é aproximada, pois não se tem certeza com relação ao século no qual esse matemático grego desenvolveu as suas atividades matemáticas (DERBYSHIRE, 2006).

utilização da escrita retórica perdurou no oeste da Europa até, aproximadamente, o século XV (BAUMGART, 1992).

Estágio Sincopado

Nesse estágio, que se iniciou com Diofante, por volta do ano 275, a linguagem matemática discursiva começou a ser escrita com a utilização de algumas abreviações e símbolos, que representavam quantidades desconhecidas e potências até o sexto grau (KATZ, 2007). Assim, as primeiras letras das palavras eram utilizadas para abreviar essas quantidades e potências. O quadro 1 mostra algumas notações algébricas utilizadas por Diofante (EVES, 1962).

Notação Atual	Notação de Diofante	Palavra em grego	Escrita em grego	Significado
x^2	Δ^{Υ}	*Dunamis*	ΔΥΝΑΜΙΣ	Potência (Power)
x^3	K^{Υ}	*Kubos*	ΚΥΒΟΣ	Cubo
Menos (-)	⋔	*Leipis*	ΛΕΙΨΙΣ	Falta

Quadro 1: Algumas notações algébricas utilizadas por Diofante
Fonte: Adaptado de Eves (1962)

Contudo, pode-se considerar que o estágio sincopado da linguagem algébrica foi uma técnica de limitação da escrita, pois os escribas tinham que elaborar cópias de documentos constantes em manuscritos, que demandavam muito trabalho e tempo (RADFORD, 1997). Por outro lado, a fase sincopada se distingue da retórica pela substituição de abreviações frequentemente utilizadas em conceituações e operações (BELL, 1992). Nesse contexto, ao examinarmos com profundidade a História da Álgebra, principalmente no período pré-simbólico, podemos observar os primeiros passos rumo às ideias algébricas (RADFORD e GRENIER, 1996).

Estágio Simbólico

Finalmente, surge a escrita simbólica com a utilização de uma simbologia específica para os números, as operações, as relações e as expressões. Além disso, houve a manipulação entre os símbolos realizada por meio de um acordo de regras (KATZ, 2007). Contudo, apesar de ter surgido, pela primeira vez na Europa, no século XII (EVES, 1962), essa escrita não foi amplamente divulgada até meados do século XVI, quando Viétè (1540-1603), um matemático francês, divulgou essa escrita por volta do ano 1590 (BOYER, 1996). Esse período se consolidou no século XVII com os estudos desenvolvidos por Descartes (1637) e Wallis (1693). A evolução dessa escrita também pode ser verificada nos trabalhos desenvolvidos por Viétè, que descartou a utilização da letra *C* para representar o cubo, passando a utilizar a simbologia x^3, pois nessa época, o símbolo x^2 era representado somente em seu modo expandido xx (BELL, 1992).

Por outro lado, Leonardo de Pisa (1171–1250), conhecido como Fibonacci, foi considerado como um dos maiores matemáticos da Idade Média por causa dos avanços que propôs no desenvolvimento do simbolismo algébrico (KATZ, 2007). Fibonacci também foi o responsável pela divulgação e popularização da numeração Indo Arábica na Europa com a publicação do seu trabalho *Liber Abacci* em 1202.

No entanto, é necessário enfatizar que, nesse período, "Descartes sabia que, em suas equações, as letras representavam variáveis e, claramente, reconhecia a distinção entre variáveis e constantes arbitrárias, embora não as tenha definido formalmente" (BELL, 1992, p. 141). Porém, foi somente em 1821 que a definição formal de constante e quantidades variáveis foi elaborada por Cauchy (BAGNI, 2004). Nessa perspectiva, podemos afirmar que:

> *Cauchy finalmente introduziu a distinção entre constante e quantidades variáveis, embora não tivesse uma descrição axiomática formal dos números reais. É interessante notar que, a nível educacional, a formulação verbal de Cauchy era expressa no paradigma disponível naquele tempo. Atualmente, isso pode ser direcionado ao uso de diferentes representações e registros* (BAGNI, 2004, p. 9).

Com relação à divisão da escrita algébrica, do ponto de vista cultural, Radford (1997) é mais enfático em sua análise, pois argumenta que:

> (...) *quando o desenvolvimento da álgebra é visto de uma perspectiva sociocultural, essa divisão da álgebra parece ser completamente diferente, pois a álgebra sincopada não foi um estágio intermediário de maturação no qual o conhecimento descansou um pouco para se direcionar ao simbolismo. Ao invés disso, foi uma mera estratégia técnica para limitar a escrita realizada pelos escribas, que deveriam copiar os manuscritos a mão por causa da falta de tinta em tempos passados. De fato, muitas palavras frequentemente utilizadas foram abreviadas pelo uso de sua primeira letra* (RADFORD, 1997, p. 27).

Por outro lado, no século XIX, os critérios para a consolidação desses estágios foram determinados pela maneira como a linguagem era utilizada para expressar o desenvolvimento algébrico dos conceitos matemáticos (BOYER, 1996). Contudo, é necessário destacarmos a importância da aquisição da linguagem algébrica, pois é necessária para que possamos expressar a relação existente entre as grandezas matemáticas.

As Primeiras Noções de Funções

Há aproximadamente 4.000 anos, os babilônios eram considerados bons calculadores e podem ter originado a ideia de função no trabalho realizado com as tabelas ou por correspondência entre valores numéricos e expressões (BELL, 1992). Nesse contexto, podemos perceber também um primeiro esboço de formalização do conceito de função e continuidade por meio da utilização de tabelas de uma maneira incipiente e intuitiva (WUSSING, 1998). Por exemplo, nas tabelas de argila, confeccionadas pelos babilônios, foram encontrados problemas que apresentavam a:

> (...) *a tabulação não só de quadrados e cubos de inteiros de 1 a 30, mas também da combinação. Um grande número de problemas é dado que gera a equação cúbica da forma* $x^3 + x^2 = b$. *Esses problemas podem ser resolvidos utilizando a tabela de* $n^3 + n^2$ (EVES, 1962, p.32).

No entanto, até o século XI, "o desenvolvimento do pensamento funcional estava restrito às descrições qualitativas de fenômenos e relações numéricas expressas em tabelas" (RORATTO, 2009, p. 55). Porém, "com o advento do comércio, as relações funcionais mostraram-se ainda mais úteis às práticas diárias" (RORATTO, 2009, p. 55). Nesse sentido, concordamos com Ponte (1990) que afirma que as funções nos auxiliam no estudo de situações-problema relacionadas com variação. Assim, desde a sua origem histórica, as funções estão relacionadas com a noção de um instrumento matemático indispensável para o estudo qualitativo dos fenômenos naturais. Então, os babilônios construíram as tábuas de argila contendo tabelas com correspondências biunívocas com o objetivo de prever os fenômenos astronômicos (KATZ, 2007). Contudo, os babilônios se interessavam somente por valores discretos enquanto que Ptolomeu, em seu livro *Almagesto*, escrito no século II d.C., se preocupou com a base do tratamento computacional para os fenômenos contínuos. (KATZ, 2009).

A Representação Gráfica de Oresme

Existem algumas divergências quanto à antecipação do conceito de função por Oresme. No entanto, há um consenso de que uma das primeiras representações gráficas de funções foi elaborada por esse matemático, no século XIV, no final da Idade Média. Essa representação gráfica era conhecida como *latitude das formas*, na qual também pode ser encontrado o conceito de variação entre duas grandezas que está relacionado com a noção de continuidade (BONETTO, 1999). Nesse direcionamento, historicamente, a representação da latitude das formas desempenhou um importante papel na História da Matemática.

Porém, podemos argumentar que o gráfico elaborado por Oresme pode ser considerado como uma representação de quantidades físicas e não como uma antecipação ao conceito de função, pois havia a ausência da noção de unir a representação gráfica com a algébrica (WUSSING, 1998). Contudo, o ineditismo desse fato está relacionado com a utilização de coordenadas e, também, com a representação gráfica de grandezas variáveis, que teve como primeiro exemplo um gráfico de velocidade-tempo.

Para Oresme, a mensurabilidade podia ser representada de maneira contínua, traçando um gráfico de velocidade versus tempo, caso a aceleração fosse mantida constante (TASCHOW, 2003). Nessa perspectiva, o gráfico de Oresme foi traçado ao:

> (...) *longo de uma reta horizontal na qual marcou pontos representando instantes de tempo (ou longitudes), sendo que para cada instante, traçou*

> *perpendicularmente à reta de longitudes, um segmento de reta (latitude), cujo comprimento representava a velocidade* (BOYER, 1996, p. 180).

Em outras palavras, Oresme procurou representar, graficamente, certas leis, comparando a variável dependente (latitudo) com a independente (longitudo) à medida em que a longitudo tivesse pequenos acréscimos. Dessa maneira, Oresme concebeu a noção de coordenada retangular, na qual um segmento de reta proporcional ao longitudo foi considerado como sendo o valor da abscissa em um determinado ponto. Por outro lado, a ordenada era representada por um segmento de reta perpendicular, que era traçado nesse ponto, sendo proporcional ao latitudo (TASCHOW, 2003). Dessa maneira, os parâmetros longitudo e latitudo podiam variar ou permanecer constantes.

Oresme definiu *latitudo uniformis* como sendo um segmento de reta representado por uma linha paralela à longitude, enquanto que qualquer outro segmento de reta era denominado *latitudo uniformiter difformis*, que era representado por uma linha reta perpendicular em relação ao eixo da longitude (TASCHOW, 2003). Oresme também provou que essa definição era equivalente a uma relação algébrica, na qual as longitudes e latitudes de quaisquer três pontos poderiam representar a equação de uma reta (TASCHOW, 2003), pois as extremidades desses segmentos, que pertencem a uma mesma reta, são conectadas para formarem um triângulo retângulo. Então, "se o movimento uniformemente acelerado parte do repouso, a totalidade dos segmentos velocidade (denominadas de ordenadas) preencherá um triângulo retângulo" (CAMPOS, 2000, p. 24). A figura 2 mostra a representação gráfica elaborada por Oresme.

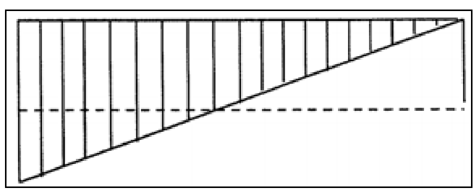

Figura 2: Representação gráfica de função elaborada por Oresme

Apesar de não fornecer explicação para esse fato, Oresme afirmava que a área do triângulo retângulo representava a distância percorrida por um determinado objeto. Provavelmente, pensou que a área desse triângulo era composta por vários segmentos verticais e indivisíveis, sendo que cada um desses segmentos representava uma velocidade (BOYER, 1996). Assim, Oresme forneceu uma "verificação geométrica da regra de Merton, pois a velocidade no ponto médio do intervalo de tempo é a metade da velocidade final" (CAMPOS, 2000, p. 25).

Oresme também trabalhou com as coordenadas retangulares, denominadas de *latitudo* e *longitudo*, sendo que as figuras geométricas resultantes, denominadas de *configurationes*, eram utilizadas para distinguir as distribuições uniforme e não uniforme de quantidades diversas, como por exemplo, a mudança de velocidade em relação ao tempo (TASCHOW, 2003). Nesse tipo de gráfico, o eixo da base (longitudo) representa o tempo, enquanto que os segmentos de reta perpendiculares concorrentes a esse eixo (latitudo) representam a velocidade em cada instante do movimento. Podemos considerar que os termos latitudo e longitudo são equivalentes, respectivamente, aos termos ordenada e abscissa (CAMPOS, 2000). Porém, o ineditismo da utilização das ordenadas por Oresme não foi comprovado, pois Apolônio de Perga (262 a.C.-190 a.C.) e outros pensadores importantes da antiguidade também utilizaram abordagens semelhantes em seus trabalhos (CAMPOS, 2000).

De acordo com esse contexto, Oresme representou o movimento unforme por meio de um retângulo (BARON, 1985) enquanto que a aceleração uniforme foi representada por meio de um triângulo retângulo (CLAGETT, 1974). Contudo, essa representação gráfica é complexa, sendo composta por características necessárias para a representação de um determinado conceito, especialmente com relação a conceituação de função (BONETTO, 1999).

Por outro lado, a figura 3 mostra que o diagrama construído por Galileu no século XVII, possui semelhanças com diagrama elaborado por Oresme no século XIV, que pode ter direcionado Galileu a desenvolver a representação gráfica funcional (TASCHOW, 2003) da lei do espaço transversal do movimento variado.

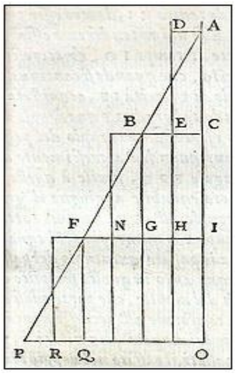

Figura 3: Representação gráfica de Galileu

É importante ressaltar que a técnica geométrica utilizada por Oresme para a representação gráfica de funções surgiu 250 anos antes da concepção elaborada por Galileu, que considerou a aceleração uniforme como um fenômeno físico para corpos em queda livre enquanto que Oresme estudava os fenômenos físicos abstratamente (KATZ, 2009). Assim, o tratado denominado *Tractatus de lattitudinibus formarumescrito* por Oresme, aproximadamente, no ano de 1360, foi impresso várias vezes entre 1482 e 1515, podendo ter influenciado os estudos desenvolvidos por muitos matemáticos que viveram na Europa durante a Renascença (STRUIK, 1987).

O Conceito de Função

Embora a definição de função não fosse percebida e nem alocada na antiguidade, esse conceito esteve presente na Matemática e nas Ciências Naturais desde o primórdio da humanidade. Por exemplo, muitas pesquisas sobre as interrelações quantitativas entre as várias grandezas físicas em acústica e astronomia foram realizadas na Grécia e na Babilônia.

Nesse sentido, a ciência desenvolvida na antiguidade estudava as operações envolvendo as funções compreendiam o estudo das propriedades, tabulação, interpolação, determinação dos pontos extremos e da resolução de problemas das funções tabuladas, que eram equivalentes ao estudo da integração moderna. Porém, a técnica das expressões analíticas e as fórmulas simbólicas estavam ausentes desse processo (YUSHKEVICH,1970).

Contudo, o desenvolvimento do conceito de função, definido como objeto de estudo em Matemática, remonta ao final do século XVII. Dessa maneira, esse conceito surgiu, pela primeira vez, na Europa medieval, em conexão com as tentativas do estudo de diversos fenômenos naturais. É importante salientar que, nessa época, a natureza do conceito de função esteve associada com a ideia de variável, priorizando, a noção de relação, que tinha por objetivo valorizar os aspectos intuitivos e relacionais dos fenômenos observados na realidade por meio das relações matemáticas (YUSHKEVICH,1970).

O período medieval foi de crucial importância para o subsequente desenvolvimento de uma teoria sobre as funções, facilitando, o desenvolvimento de outros conteúdos matemáticos como a trigonometria e os logaritmos e, também, para o surgimento da álgebra simbólica (YUSHKEVICH, 1970). Contudo, no começo do século XVII, as funções eram definidas verbal, gráfica e cinematicamente mediante a utilização de tabelas. No entanto, é importante ressaltar que, durante a segunda metade desse século, as expressões analíticas também foram desenvolvidas.

A tentativa de uma definição acadêmica para o conceito de função inicia-se com Johann Bernoulli, em 1718, que argumentou que a "função de uma magnitude variável é composta por uma quantidade, de *q*, a partir dessa magnitude e forma constantes" (KATZ, 2009, p. 783). Essa definição foi complementada pelas contribuições de Euler, em 1748, que redefiniu-a em 1755. Posteriormente, Lacroix reconceituou essa definição em 1810, Fourier em 1822 e Heine em 1872, até a definição atual proposta por Dirichlet (1805-1859) em 1837[2]. Durante o período em que viveu, Dirichlet foi um dos matemáticos mais renomados de sua época. A figura 4 mostra uma ilustração de Dirichlet.

[2]Dirichlet foi um matemático alemão de família belga que fez seus estudos básicos em seu país nativo e foi para a França em 1822 para estudar no *Collége de France* onde conheceu vários proeminentes intelectuais como Joseph Fourier. Retorna à Alemanha em 1825, sendo que em 1828 é indicado à Universidade de Berlim, permanecendo no cargo por 27 anos. Em seguida foi para a Universidade de Gottingen para se dedicar com mais intensidade à pesquisa, permanecendo por três anos e meio, até o seu falecimento em 1859.

Figura 4: Ilustração de Johann Gustav Peter Lejeune Dirichlet

Provavelmente, o termo função tenha sido utilizado, pela primeira vez, em 1673, no manuscrito de Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) intitulado *Methodus tangentium inversa, seu de functionibus*. No começo desse manuscrito, Leibniz demonstrou possuir um determinado conhecimento sobre o conceito inicial de função, utilizando o termo *relatio* para denominar relação. Leibniz também utilizou esse termo apenas para designar, em âmbito mais geral, a dependência de uma curva de quantidades geométricas, como por exemplo, as subtangentes e as subnormais (AZEVEDO OLIVEIRA, 2012).

Contudo, ainda existe uma discussão para determinar quem foi o primeiro matemático a utilizar o símbolo *f* para denominar uma função. Kline (1972) afirma que Leibniz foi o primeiro matemático a introduzir, em 1675, a terminologia função de *x* ou *f(x)*. De acordo com Cajori (1993), Euler, em 1734, teria sido o primeiro matemático a utilizar o símbolo *f(x)* em um artigo publicado no *Commentarii Academiae Scientiarum Petropolitanae*, que foi o primeiro periódico publicado pelo *St. Petersburg Academy* na Rússia (CALINGER, 1996). Em seu trabalho realizado nessa área, provavelmente, Euler escreveu que "Si $f\left(\frac{x}{a}+c\right)$ denotet funtionem quamcunque ipsius $\frac{x}{a}+c$" (CAJORI, 2007, p. 268). Nesse mesmo ano, Euler utilizou, pela primeira vez, os parênteses para a escrita simbólica das funções (CAJORI, 2007). Em contrapartida, Maor (1994) estabelece que Lagrange foi o primeiro matemático a introduzir, em 1797, a simbologia *f* para denominar uma função. De acordo com esse contexto, Cajori (1993) argumenta que Lagrange foi o responsável pela introdução dos símbolos *f', f''*, ...; para representar as derivadas sucessivas de uma função.

Por outro lado, em abril de 1692, no texto intitulado *De linea ex lineis numero infinitis ordinatim*, publicado por OVE no *Acta Eruditorum*, provavelmente escrito por Leibniz, foi utilizada a palavra *functiones* de uma maneira que denota o relacionamento entre uma linha reta, uma curva e a sua tangente A palavra função também apareceu impressa no artigo intitulado *Nova Calculi differentialis* publicado por Leibniz na revista *Acta Eruditorumem*, em Julho de 1694. Nesse artigo, Leibniz utilizou o termo função de uma maneira mais técnica, definindo-a como parte de uma linha reta que é cortada por outras linhas retas que são traçadas em relação a um ponto fixo e a um ponto na curva, que é providenciado juntamente com o grau de sua curvatura (YUSHKEVICHY, 1970).

Em julho de 1698, Johan Bernoulli, discípulo de Leibniz, escreveu uma carta para o seu mestre, que continha a expressão *earum quaecunque functiones per alias applicatas*

PZ expressae, que utilizava a palavra função com o significado de uma expressão analítica. No final daquele mês, Leibniz respondeu essa carta para demonstrar a sua aprovação quanto à utilização do termo função utilizado por Bernoulli (CAJORI, 1993). Nesse mesmo ano, os termos variável, parâmetro e constante também foram introduzidos por Leibniz (YUSHKEVICH, 1970). Em 1718, a definição de função como uma expressão analítica foi introduzida por Bernoulli, em um artigo publicado em *Memoires del'Academie des Sciences* de Paris. Nesse artigo, Bernoulli determinou que a função era composta por uma quantidade variável e por outra constante.

Resumindo essa conceituação histórica, verificamos que quando a função é percebida como o estudo das relações entre duas grandezas, as variáveis representam números que dependem de outros números. Dessa maneira, a noção de função parece surgir naturalmente (USISKIN, 1995; URSINI e TRIGUEROS, 2000). Por outro lado, o conceito de função também foi estabelecido como uma ferramenta matemática para auxiliar a humanidade a entender os processos de fluência e de interdependência, que são intrínsecos aos fenômenos enfrentados no cotidiano (CARAÇA, 1951).

Considerações Finais

Neste artigo teórico, nosso principal objetivo foi promover uma discussão breve sobre o desenvolvimento histórico das funções, que surgiram em virtude da necessidade que a humanidade tem de entender, compreender e explicar a realidade. Dessa maneira, a ideia de função sempre esteve presente em situações isoladas e pouco sistematizadas, sendo que foram utilizadas para a resolução de situações-problema enfrentadas no cotidiano.

Na antiguidade, a noção de função foi desenvolvida em pesquisas sobre as interrelações quantitativas na acústica e na astronomia. Assim, há aproximadamente 4000 a.C., os babilônios eram considerados bons calculadores e podem ter introduzido a ideia de função em forma de tabelas ou como uma correspondência entre duas variáveis por meio da utilização da álgebra retórica (BELL, 1992). Em outro exemplo, na antiguidade, os gregos trabalharam com situações-problema que, implicitamente, continham a noção de função, porém, não foram capazes de reconhecê-la, simbolizá-la e sistematizá-la (SASTRE VÁZQUEZ, REY e BOUBÉE, 2008).

Contudo, as primeiras manifestações da representação gráfica de uma função, que relacionava velocidade e tempo, são atribuídas a Oresme no século XIV, na qual a ideia de variação trouxe a noção de movimento. No Renascimento, apareceram indícios do surgimento de leis quantitativas para que se pudesse entender os fenômenos que ocorrem na natureza enquanto que no século XVI, Galileu e Descartes introduziram o método analítico para a definição de funções. Posteriormente, no século XVII, Leibniz parecer ter sido o primeiro matemático a utilizar o termo função com um sentido parecido ao empregado atualmente. Nesse mesmo século, Galileu e Newton ampliaram as noções de lei e de dependência entre fenômenos.

No século XVIII, Bernoulli utilizou as funções para designar os valores obtidos nas operações entre variáveis e constantes, porém, com significado geométrico. Com Euler, a noção de função tornou-se fundamental no estudo dos processos infinitos, que pode ter definido a notação atual de função. Nesse sentido, "a partir de Euler, o conceito de função passa a ter um novo status, passando a ser a linguagem preferida pelos matemáticos" (CAMPOS, 2000, p. 26).

Finalizando, o desenvolvimento das funções vem sendo elaborado desde os tempos dos babilônios, de aproximadamente 4.000 a.C. até o século XIX, quando a sua definição atual foi elaborada por Dirichlet, no ano de 1837.

Referências

AZEVEDO OLIVEIRA, D. P. (2012) *Um estudo misto para entender as contribuições de atividades baseadas nos fundos de conhecimento e ancoradas na perspectiva sociocultural da história da matemática para a aprendizagem de funções por meio da pedagogia culturalmente relevante*. 2012. 311p. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática) - Universidade Federal de Ouro Preto (UFOP), 2012.

BAGNI, Giorgio T. 2004. Exhaustion argumentand limit concept in the History of Mathematics: educational reflections. In: FURINGHETTI, F. KAISER, S. & VRETBLAD, A. (Eds). *Proceedings of HPM, History and Pedagogy of Mathematics*. Uppsala, July 12-17, 94-103.

BARON, M. E. 1985. *Curso de história da matemática*: origem e desenvolvimento do cálculo. Brasília, DF: Universidade de Brasília.

BAUMGART, J. K. 1992. *Álgebra*. Série Tópicos de História da Matemática para uso em sala de aula. São Paulo, SP: Atual Editora.

BELL, Eric Temple. 1992. *The development of mathematics*. New York, NY: Dover Publication.

BONETTO, Giácomo Augusto. 1999. *A construção da representação gráfica e o seu papel no ensino de funções*: uma visão histórica. (Dissertação de Mestrado). Faculdade de Educação. Universidade Estadual de Campinas. Campinas, SP: Universidade Estadual de Campinas.

BOYER, Carl B. 1996. *História da Matemática*. (trad. Elza Gomide). São Paulo, SP: Edgard Blucher.

BRASIL. 2006, *Orientações curriculares para oensino médio*: ciências da natureza, matemática e suas tecnologias. Brasília, DF: MEC/SEB.

CAJORI, Florian, A. 2007. *A History of Mathematical Notations*. Volume I. New York, NY: Cosimo Classics.

CAJORI, Florian, A. 1993. *History of Mathematical Notations*. New York, NY: Dover Publications.

CALINGER, Ronald. 1996. Leonhard Euler: the first St. Petersburg years (1727-1741). *Historia Mathematica*, *23*, 121-166

CAMPOS, C. R. 2000. *O ensino da matemática e da física numa perspectiva integracionista*. Dissertação de mestrado não publicada. 140 p. São Paulo, SP: Pontifícia Universidade Católica de São Paulo – PUCSP.

CARAÇA, B. J. 1951. *Conceitos fundamentais da matemática*. Lisboa, Portugal: Sá da Costa.

CLAGETT, M. 1974. Oresme, Nicole. In: GILLISPIE, C. C. (Ed.). *Dictionary of Scientific Biography*, pp. 220-230. New York, NY: Charles Scribner's Sons.

EVES, Howard. 1962. *An Introducion to the History of Mathematics*. New York: Holt, Rinehart & Winston.

KATZ, V. 2007. Stages in the history of algebra with implications for teaching. *Educational Studies in Mathematics*, v. 66, p. 185-201.

KATZ, V. 2009. *The history of mathematics*: an introduction. Boston, MA: Addison-Wesley.

KLINE, M. 1972. *Mathematical thought from ancient to modern times*. Oxford, Inglaterra: Oxford University Press.

MAOR, E. 1994. *The story of a number*. Princeton, NJ: Princeton University Press.

MOURA, Anna Regina Lanner de; SOUSA, Maria do Carmo de. 2005. *O lógico-histórico da álgebra não simbólica e da álgebra simbólica:* dois olhares diferentes. Zetetike, v. 13, n. 24, p. 11 - 45.

NOBRE, S.R. 2005. Leitura crítica da história: reflexões sobre a história da matemática. *Ciência & Educação*, v.10, n. 3, p. 531-543.

PONTE, J. P. 1990, O conceito de função no currículo de matemática. *Revista Educação e Matemática*, n. 15, p. 3-9.

RADFORD, Luis. 1997. On psychology, historical epistemology, and the teaching of mathematics: towards a socio-cultural history of mathematics. *For the Learning of Mathematics 17*,1. Vancouver, British Columbia, Canada: FLM Publishing Association.

RADFORD, Luis. GRENIER, Monique. 1996. Entre les chose, les symboles et les idées... une séquence d'enseignement d'introduction à l'algébre. *Revue des sciences de l'éducation*, VOL XXII, n.2, p. 253 – 276.

RORATTO, Cauê. 2009. *A História da Matemática como estratégia para o alcance da aprendizagem significativa do conceito de função*. (Dissertação de Mestrado). Universidade Estadual de Maringá.

SASTRE VÁZQUEZ, P.; REY, G.; BOUBÉE. C. 2008. El concepto de función a través de la Historia. *UNIÓN Revista Iberoamericana de Educación Matemática* – Diciembre de 2008, n. 16, p. 141-155.

SCARLASSARI, N. T; MOURA, A. R. L. 2006. *A linguagem e o movimento no aprendizado de Álgebra Elementar.* Anais do VIII EPEM. VIII Encontro Paulista de Educação Matemática. São Paulo: SBEM – Regional São Paulo e UNICSUL – Universidade Cruzeiro do Sul, 24,25 e 26 de agosto de 2006.

STRUIK, D. J. 1987. *A concise history of mathematics*. New York, NY: Dover Publications.

TASCHOW, U. *Nicole Oresme und der frühling der moderne:* die ursprünge unserer modernen quantitativ-metrischen weltaneignungsstrategien und neuzeitlichen bewusstseins- und wissenschaftskultur. Halle, Deustschland: Avox Medien-Verlag, 2003.

URSINI, S.; TRIGUEROS, M. 2000, La conceptualización de la variable em la enseñanza media. *Educación Matemática*, v. 12, n. 2, p. 27-48.

USISKIN, Z. 1995, Concepções sobre a álgebra da escola média e utilizações dasvariáveis.In: COXFORD, A. F., SHULTE, A. P. (Orgs.). *As ideias da álgebra*. São Paulo, SP: Atual, pp. 9-22.

WUSSING, Hans. 1998. *Lecciones de Historia de las Matemáticas*. Siglo XXI de España Editores S.A. Trad. Elena Ausejo, José Luis Escorihuela, Mariano Hormigón (diretor), Daria Kara-Murzá y Ana Millán.

YUSHKEVICH, A. P. 1970. *History of Mathematics from ancient times to the beginning of 20-th century in 3 volumes*. Moscow, Russia: M. Nauka.

Ilustrações - Figuras

Illustration 1: extracted from: http://www.emis.de/journals/JEHPS/portraitsang.html (access: April 27th, 2013)

Illustration 2: extracted from: Boyer (1996, p. 181).

Illustration 3: extracted from: http://www.thefullwiki.org/Nicole_Oresme (access: April 27th, 2013)

Illustration 4: extracted from:
http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Dirichlet.html (access: April 23rd, 2013).

Davidson Paulo Azevedo Oliveira
Coordenação de Matemática – CODAMAT – campus de Ouro Preto - Brasil
E-mail: davidson.oliveira@ifmg.edu.br

Milton Rosa
Centro de Educaçâo Aberta e a Distância – CEAD – campus de Ouro Preto - Brasil
E-mail: milrosa@hotmail.com

Marger da Conceição Ventura Viana
Centro de Educaçâo Aberta e a Distância – CEAD – campus de Ouro Preto - Brasil
E-mail: margerv@terra.com.br