UM ESTUDO DAS POTENCIALIDADES PEDAGÓGICAS DAS INVESTIGAÇÕES MATEMÁTICAS NO DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO ALGÉBRICO[1]

Dario Fiorentini[2]
Fernando Luís Pereira Fernandes
Eliane Matesco Cristovão

Faculdade de Educação – Unicamp - Brasil

Resumo: Este artigo relata uma pesquisa cujo objetivo principal era investigar as potencialidades pedagógicas das investigações matemáticas (IM) no ensino da álgebra elementar, identificando, sobretudo, indícios de formação e desenvolvimento da linguagem e do pensamento algébricos de alunos ao iniciarem o estudo deste tópico escolar. O trabalho de campo foi desenvolvido junto a duas classes do sexto ano do ensino básico de uma escola pública estadual no interior do Estado de São Paulo e contou com a colaboração de uma professora-parceira da escola e que fazia parte do Grupo de Sábado. Foram planejadas e aplicadas duas tarefas investigativas nas duas classes. Neste trabalho, entretanto, descrevemos e analisamos os resultados obtidos a partir da realização da segunda tarefa investigativa, pois esta buscou explorar de maneira intencional a mobilização e o desenvolvimento da linguagem e do pensamento algébricos. O material de análise é constituído de registros escritos pelos alunos, de diários de campo dos pesquisadores e gravações em áudio e vídeo. O estudo desenvolvido mostra que este é um contexto rico de mobilização e desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos, apresentando indícios de que as IM representam um momento rico e desafiador de aprendizagem, tanto para alunos quanto para professores.

Introdução

Este artigo relata um estudo cujo objetivo principal era investigar as potencialidades pedagógicas das investigações matemáticas (IM) no ensino da álgebra elementar, identificando, sobretudo, indícios de formação e desenvolvimento da linguagem e do pensamento algébricos de alunos do sexto ano de escolarização, etapa do currículo escolar brasileiro que marca o início do estudo sistemático da álgebra elementar.

O trabalho de campo foi desenvolvido durante o ano de 2004 junto a duas classes de 6ª série do Ensino Fundamental de uma escola pública estadual no interior do

[1] Projeto de pesquisa desenvolvido com auxílio da Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP) [Processo 03/11233-4].

[2] dariof@unicamp.br

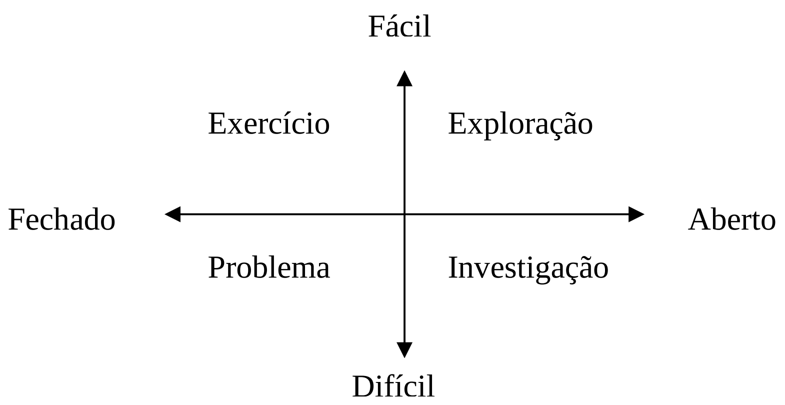
Estado de São Paulo e contou com o desenvolvimento de um projeto de iniciação científica do segundo autor, tendo como orientador o primeiro autor e como professora-parceira da escola, a terceira autora.

Embora tenhamos planejado e aplicado duas tarefas investigativas nas duas classes, neste trabalho descrevemos e analisamos os resultados obtidos a partir da realização da segunda tarefa investigativa, pois esta buscou explorar de maneira intencional a mobilização e o desenvolvimento da linguagem e do pensamento algébricos. Antes disso, porém, tecemos algumas considerações sobre IM nas aulas de matemática e as principais concepções de educação algébrica, destacando principalmente os elementos caracterizadores do pensamento algébrico.

As Investigações Matemáticas em Sala de Aula

A utilização de tarefas investigativas nas aulas de Matemática é uma perspectiva de trabalho pedagógico que o professor pode lançar mão para a realização de um ensino significativo da Matemática. Uma aula que promove um ambiente de investigação matemática, segundo Castro (2004), pode ser chamada de *aula investigativa*. Em outras palavras, “as aulas investigativas supõem o envolvimento dos alunos com tarefas investigativas que permita a eles realizar atividade matemática” (p. 34).

Para melhor compreender o que diferencia uma tarefa investigativa de outros tipos de tarefas matemáticas, Ponte (2003) distingue, em um diagrama, quatro tipos diferentes: exercícios, problemas, explorações e investigações.



Os limites que diferenciam uma exploração de uma investigação nem sempre são claros.

As explorações tendem a ser mais livres e menos sistemáticas, demandando um tempo relativamente pequeno de trabalho. As explorações são freqüentemente utilizadas para introduzir um novo tema de estudo ou para problematizar e produzir significados a um conceito matemático.

As investigações, por sua vez, levam mais tempo - podendo ter duração de duas aulas a até um semestre letivo - e demandam, segundo Ponte (2003), quatro momentos principais:

- Exploração e formulação de questões investigativas (ou situações problemáticas);
- Organização de dados e construção de conjecturas;
- realização de testes e refinamento e sistematização das conjecturas;
- e construção de justificativas, argumentações ou demonstrações, tendo em vista a validação dos resultados.

Em síntese, podemos dizer que as investigações matemáticas diferenciam-se das demais por serem situações-problema desafiadoras e abertas, permitindo aos alunos várias alternativas de exploração e investigação. O conceito de investigação matemática, como atividade de ensino-aprendizagem, portanto,

> ajuda a trazer para a sala de aula o espírito da atividade matemática genuína, constituindo, por isso, uma poderosa metáfora educativa. O aluno é chamado a agir como um matemático, não só na formulação de questões e conjecturas e na realização de provas e refutações, mas também na apresentação de resultados e na discussão e argumentação com os seus colegas e o professor (PONTE; BROCADO; OLIVEIRA, 2003, p. 23).

Neste estudo, trabalhamos e investigamos, sem estabelecer uma distinção clara, as duas últimas formas de tarefas acima referidas. Por isso, para fazer referência a ambas, utilizaremos a expressão *tarefas exploratório-investigativas*.

Algumas Concepções de Educação Algébrica

De acordo com Fiorentini, Miorim e Miguel (1993), há três concepções de educação algébrica que, historicamente, vem exercendo maior influência no ensino de matemática elementar. A primeira, chamada de *lingüístico-pragmática*[3], foi predominante durante o século XIX e estendeu-se até a metade do século XX. A

[3] Esta concepção entendia que o papel do ensino da álgebra era fornecer um instrumental técnico (superior ao da aritmética) para a resolução de equações ou de problemas equacionáveis. Para o aluno adquirir essa capacidade era considerado necessário e suficiente, primeiro, dominar, ainda que de forma mecânica, as técnicas requeridas pelo transformismo algébrico (sintaxe). O currículo de ensino da álgebra, portanto, tinha como ponto de partida o cálculo literal (operações de adição, subtração, multiplicação/fatoração e divisão de expressões algébricas), o qual era desenvolvido através de muitos exercícios visando capacitar os alunos no manejo preciso dessas expressões algébricas. Só depois disso é que eram introduzidos problemas-tipo de aplicação algébrica.

segunda concepção, *a fundamentalista-estrutural*[4], predominante nas décadas de 1970 e 1980, trouxe consigo uma nova forma de interpretar a álgebra no ensino, tendo por base as propriedades estruturais, que serviam para fundamentar e justificar as passagens do transformismo algébrico. A terceira concepção - a *fundamentalista-analógica* - procura fazer uma síntese entre as duas anteriores, pois tenta recuperar o valor instrumental da álgebra e preserva a preocupação fundamentalista, só que não com base nas propriedades estruturais, mas, sim, através do uso de modelos analógicos geométricos (blocos de madeira ou mesmo figuras geométricas) ou físicos (como a balança) que visualizam ou justificam as passagens do transformismo algébrico.

O ponto problemático e comum entre essas três concepções, segundo Fiorentini et al. (1993), é que elas praticamente reduzem o ensino da álgebra aos seus aspectos lingüísticos e transformistas, dando mais ênfase à sintaxe da linguagem algébrica que ao pensamento algébrico e seu processo de significação (a semântica). Em outras palavras, as três concepções enfatizam o ensino de uma linguagem algébrica já constituída, priorizando o domínio, por parte do aluno, de habilidades manipulativas das expressões algébricas. Além disso, a álgebra não se reduz a um instrumento técnico-formal que facilita a resolução de certos problemas. Ela é, também, uma forma específica de pensamento e de leitura do mundo.

Essa análise nos desafia a repensar o ensino da álgebra trazendo como foco de reflexão a relação entre pensamento e linguagem. Tradicionalmente o ensino da álgebra se sustenta na crença de que o pensamento algébrico só se manifesta e se desenvolve a partir do cálculo literal ou através da manipulação da linguagem simbólica da álgebra. Para nós, entretanto, tanto do ponto de vista histórico quanto cognitivo, a linguagem algébrica é também resultado de uma forma especial de pensamento (Fiorentini & Miorim, 1993). Em cada época, vimos surgir, para expressar o pensamento algébrico, uma linguagem possível e integrada historicamente à cultura de uma determinada comunidade de prática.

Para Vygotsky (1993), pensamento e linguagem são interdependentes, um promovendo o desenvolvimento da outra e vice-versa. Ou seja, no processo ensino-aprendizagem, a linguagem não antecede necessariamente o pensamento, embora a

[4] Esta concepção entendia que o papel do ensino da álgebra era fornecer os fundamentos lógico-matemáticos para toda a matemática escolar (inclusive aqueles tradicionalmente considerados algébricos, como o cálculo algébrico e o estudo das equações). Isto era realizado através da introdução dos campos numéricos, da Teoria dos Conjuntos, das estruturas e das propriedades (fechamento, comutativa, elemento neutro,...), das relações e funções... Assim, o emprego das propriedades estruturais das operações servia

apropriação da linguagem possa potencializar e promover o desenvolvimento do pensamento algébrico.

A iniciação ao desenvolvimento do pensamento algébrico, portanto, pode ocorrer já desde os primeiros anos de escolarização. Segundo o educador matemático Ken Milton (1989) "aquilo que ensinamos em aritmética e a forma como a ensinamos têm fortes implicações para o desenvolvimento do pensamento algébrico".

A nossa hipótese é que a realização de atividades exploratório-investigativas - que visam levar os alunos a *pensar genericamente, perceber regularidades e explicitar essa regularidade através de estruturas ou expressões matemáticas, pensar analiticamente, estabelecer relações entre grandezas variáveis,...* (Fiorentini; Miorim & Miguel,1993, p. 87) – pode ser uma alternativa poderosa para o desenvolvimento inter-relacionado do pensamento e da linguagem algébrica do aluno.

Tomando por base a evolução história da álgebra, esses autores sustentam que, pedagogicamente, o pensamento algébrico pode ser desenvolvido gradativamente antes mesmo da existência de uma linguagem algébrica simbólica. Isso acontece, sobretudo, quando a criança estabelece relações/comparações entre expressões numéricas ou padrões geométricos (como veremos, mais adiante, na Tarefa I); percebe e tenta expressar as estruturas aritméticas de uma situação-problema; produz mais de um modelo aritmético para uma mesma situação-problema; ou, reciprocamente, produz vários significados para uma mesma expressão numérica; interpreta uma igualdade como equivalência entre duas grandezas ou entre duas expressões numéricas; transforma uma expressão aritmética em outra mais simples; desenvolve algum tipo de processo de generalização; percebe e tenta expressar regularidades ou invarianças; desenvolve/cria uma linguagem mais concisa ou sincopada ao expressar-se matematicamente...

Os aspectos descritos neste último parágrafo podem ser considerados caracterizadores do pensamento algébrico. Acreditamos que tais aspectos podem ser mobilizados e desenvolvidos pelos alunos a partir de tarefas exploratórias ou investigativas cuidadosamente planejadas, tendo em vista essa finalidade. É o que tentamos experienciar e investigar neste estudo. Na análise das resoluções ou produções dos alunos, tomaremos esses aspectos como principal referência para identificar a evolução do pensamento algébrico que vai de uma fase **pré-algébrica**

---

para justificar logicamente cada passagem presente no transformismo algébrico...

(quando o aluno utiliza algum que outro elemento considerado algébrico – letra, por exemplo – mas não consegue, ainda, concebê-lo como número generalizado qualquer ou como variável), passa por uma **fase de transição** (do aritmético para o algébrico, sobretudo quando o aluno aceita e concebe a existência de um número qualquer, estabelece alguns processos e generalização, podendo ou não utilizar a linguagem simbólica), atingindo, enfim, um **pensamento algébrico mais desenvolvido** (expressando capacidade de pensar e se expressar genericamente, sobretudo quando o aluno aceita e concebe a existência de grandezas numéricas abertas ou variáveis dentro de um intervalo numérico, sendo capaz não só de expressá-las por escrito, mas, também, de operá-las). Cabe, contudo, esclarecer que, para nós, o aluno pode atingir a terceira fase do pensamento algébrico, sem necessariamente fazer uso de uma linguagem estritamente algébrico-simbólica.

Olhando, entretanto, de outra perspectiva, não podemos deixar de reconhecer que o pensamento algébrico se potencializa à medida que, gradativamente, o estudante desenvolve uma linguagem mais apropriada a ele. Assim, se, de um lado, a introdução precoce e sem suporte empírico a uma linguagem simbólica e abstrata pode funcionar como obstáculo ao desenvolvimento do pensamento algébrico, de outro, o menosprezo ou recusa ao modo simbólico e formal de pensar algebricamente, pode representar também um freio ao pleno desenvolvimento do pensamento algébrico (Fiorentini & Miorim, 1993).

Embora a linguagem ordinária ou retórica seja um meio de comunicação de idéias, a matemática desenvolveu historicamente sua própria linguagem, notadamente escrita e simbólica, para comunicar suas idéias e conceitos. Socas et al. (1996) afirmam que linguagem matemática escrita opera, atualmente, em dois níveis. O primeiro nível seria o *semântico*, no qual as notações e símbolos matemáticos são tratados com significados claros e relativamente precisos, guardando, assim, alguma semelhança com a linguagem retórica ou ordinária. O segundo seria o nível *sintático*, no qual as regras e os procedimentos podem ser operados sem referência direta a seus significados. Assim, priorizar, na prática escolar, apenas um desses níveis pode representar perda do poder matemático para os alunos.

Fiorentini et. al. (1993, p.33-34), visando desenvolver essa natureza interdependente da linguagem e do pensamento matemático, propõem uma *quarta concepção de educação algébrica*, para a qual o ensino de álgebra tem início mediante exploração de *situações-problema relativamente abertas (*diríamos, hoje, tarefas exploratório-investigativas*) ou problematização de fatos tidos como aritméticos ou geométricos que demandem a construção de generalizações, a representação de número generalizado ou de grandezas incógnitas e variáveis.*Uma segunda etapa seria fazer o percurso inverso; partindo de uma expressão algébrica, tida como pura ou simbólica, o aluno tentaria atribuir múltiplos sentidos ou significações a ela. É somente depois dessa etapa que o transformismo algébrico - ou *cálculo algébrico,* usando a referência do currículo tradicional - ganharia certo destaque na prática pedagógica. Esta seria a terceira etapa, momento que a atenção recai sobre o modo como as expressões algébricas podem ser transformadas em expressões equivalentes e sobre os procedimentos que validam tais transformações. Essas etapas, entretanto, não acontecem necessariamente nesta ordem. Por exemplo, na exploração de padrões de seqüências geométricas ou numéricas, as generalizações construídas pelos alunos podem, muitas vezes, já envolver processos de transformação de expressões algébricas. Mas, cabe, contudo, lembrar que, nesse momento, o exercício do transformismo algébrico não é o principal objetivo didático do professor.

Na realização de nossa pesquisa de campo, envolvendo tanto o planejamento das tarefas quanto a realização das atividades em classe, daremos destaque especial à primeira das etapas acima descritas, pois queremos investigar as potencialidades pedagógicas das tarefas/atividades exploratório-investigativas na construção e desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos no momento que iniciam intencionalmente o estudo da álgebra elementar.

Metodologia da pesquisa

Tendo em vista o objetivo de investigar as potencialidades pedagógicas das investigações matemáticas na mobilização e desenvolvimento do pensamento algébrico e de sua linguagem, no momento de iniciação ao estudo da álgebra elementar, planejamos, inicialmente, três tarefas exploratório-investigativas. Essas tarefas foram elaboradas por Fernando Luís Pereira Fernandes, sob a orientação de Dario Fiorentini.

Para desenvolvê-las em sala de aula, contamos com a parceria de uma professora do Grupo de Sábado (GdS)[5] – Eliane Matesco Cristovão. Mas, antes disso, essas tarefas

[5] O GdS é constituído por professores da rede pública e particular da região de Campinas, SP, por alunos da Licenciatura em Matemática e da pós-graduação em Educação Matemática da FE/Unicamp e por professores universitários, tendo como coordenador geral o Professor Dario Fiorentini. Este Grupo reúne-se quinzenalmente, aos sábados pela manhã, com o objetivo de realizar leituras, reflexões e investigações

foram levadas para discussão no GdS. A discussão no grupo foi enriquecida pelos múltiplos olhares e saberes experienciais dos professores participantes. Assim, considerando a realidade da escola pública brasileira, foram feitas várias sugestões de reformulação e adaptação das tarefas e a recomendação, sobretudo por parte da professora parceira, para reduzir a apenas duas tarefas. As tarefas, a partir das discussões no grupo, adquiriam um caráter mais aberto e exploratório-investigativo.

Aprendemos que a elaboração de tarefas investigativas é um processo que se aprende fazendo, tendo a colaboração do olhar do outro. Além disso, não há receitas nem manual que ensinem como criá-las. A primeira tarefa visava explorar o processo de generalização e introduzir os alunos à prática das investigações matemáticas. A segunda tarefa visava trabalhar a álgebra como estudo de relações entre grandezas variáveis, isto é, introduzir o aluno às primeiras noções de função.

As duas tarefas foram, então, desenvolvidas por Fernando e Eliane, junto a duas classes do sexto de uma escola pública do interior do Estado de São Paulo. A condução da atividade em classe era ora dirigida por Fernando ora por Eliane, embora o primeiro tivesse a incumbência e a responsabilidade de fazer os registros dos acontecimentos que ocorriam em classe. O material de análise, portanto, foi formado basicamente de registros e relatórios escritos pelos alunos, de diários de Fernando e de notas de campo da professora Eliane, além de registros em áudio e vídeo de episódios de aula.

Após a primeira tarefa, foi solicitado a cada aluno que emitisse sua opinião, por escrito, sobre a atividade desenvolvida. No final da segunda tarefa, foi aplicado um questionário, o qual solicitava, primeiramente, que os alunos escrevessem uma carta para um(a) colega de outra classe, contando sobre como é estudar matemática através de aulas investigativas. A seguir, solicitava aos alunos aspectos positivos e negativos das atividades desenvolvidas.

Os registros e o material coletado durante a pesquisa de campo também tiveram um momento de socialização e discussão no Grupo de Sábado. No grupo, foi possível fazer uma classificação dos relatórios elaborados a partir das interpretações realizadas pelos alunos. Os múltiplos olhares dos colegas contribuíram para perceber outras relações da prática desenvolvida e estabelecer outros questionamentos, tais como: por que alguns alunos desenvolveram mais do que outros, se nenhum deles havia tido contato anterior com as investigações matemáticas e, menos ainda, com a Álgebra?

---

sobre a prática de ensino de matemática nas escolas, focalizando principalmente os problemas e experiências da prática pedagógica dos próprios docentes.

Além disso, outros docentes do grupo desenvolveram essas tarefas em outros contextos escolares. Isso possibilitou estabelecer contraste e comparação entre os diferentes resultados obtidos.

Dario e Fernando, na condição de principais interessados pela investigação, buscaram aprofundar teoricamente os estudos relacionados às investigações matemáticas associadas ao desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos. Estes pesquisadores assumiram também a tarefa de realizar a análise mais sistemática das produções dos alunos, tendo como referência três categorias - aquelas que denotaram: (1) apenas um pensamento pré-algébrico; (2) um pensamento de transição do pré-algébrico ao algébrico; (3) e um pensamento algébrico mais desenvolvido.

As tarefas e a dinâmica didático-pedagógica da atividade em sala de aula

As duas sextas séries tinham, em média, 40 alunos cada uma, por isso optamos pelo desenvolvimento da atividade em grupos de quatro alunos. Esta opção assenta-se no pressuposto de que o trabalho colaborativo, além de ser formativo aos alunos - no sentido de aprenderem a trabalhar com o outro -, favorece, também, a discussão e a construção conjunta do conhecimento matemático. Nesse processo, os alunos se apropriam e desenvolvem, apoiados uns nos outros, a linguagem e o pensamento algébricos.

As duas tarefas investigativas buscavam explorar aspectos diferentes do pensamento algébrico. A primeira propunha um trabalho exploratório-investigativo a partir de uma seqüência-padrão de natureza numérico-geométrica; algo comumente trabalhado na iniciação ao estudo da álgebra em um contexto exploratório-investigativo. Esta tarefa visava o processo de generalização. A segunda tarefa buscava romper com essa tradição, introduzindo uma situação problema exploratório-investigativo diferente dos padrões seqüenciais, visando explorar as grandezas variáveis.

Antes de iniciar as aulas, julgávamos que seriam suficientes 16 horas-aula, oito para cada classe. Mas, esse tempo não foi suficiente para que os alunos desenvolvessem o trabalho por completo. Assim, foram necessárias 22 horas-aula. Com certeza, não foi um tempo perdido, e sim, um momento único, onde professores e alunos puderam conhecer e vivenciar um pouco da dinâmica das aulas investigativas, além da oportunidade que os alunos tiveram para aprender a investigar em aulas de Matemática.

Quanto à dinâmica das aulas investigativas desenvolvidas nas duas classes, tanto em relação à primeira tarefa e, sobretudo, em relação à segunda, seguimos a seguinte orientação:

1º) apresentação das tarefas aos alunos, tendo o cuidado de esclarecer e orientar os alunos na realização das investigações;

2º) investigação dos alunos em pequenos grupos, tendo o suporte dos professores que estimulavam os alunos a prosseguirem em suas conjecturas;

3º) organização/escrita do relatório da investigação;

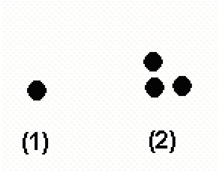
4º) Socialização inter-grupos, promovendo discussão, negociação, validação e refutação de resultados.

Os resultados obtidos em classe superaram as expectativas iniciais dos docentes, pois percebeu-se que, apesar das condições e dificuldades presentes no ensino público estadual, os alunos demonstraram muita criatividade e interesse em aprender. Essa experiência reforçou ainda mais nossa crença nas possibilidades didáticas das investigações matemáticas no currículo escolar, mesmo em escolas públicas de periferia.

No primeiro dia de atividade investigativa, foi apresentada aos alunos uma ficha contendo a 1ª tarefa e as orientações para sua realização em pequenos grupos. Após a divisão da classe em equipes de quatro alunos, Fernando, com o intuito de esclarecer possíveis dúvidas, fez a leitura comentada dos objetivos propostos e da tarefa exploratório-investigativa. Esse momento de explicação da tarefa e arranque da atividade, principalmente quando os alunos tomam contato pela primeira vez com as investigações matemática, como foi o caso, é tão importante quanto a sua realização, sistematização e discussão dos resultados, pois, outras interpretações podem emergir por parte dos alunos e que podem não contemplar os objetivos inicialmente propostos.

A tarefa I foi a seguinte:

> Hoje, vamos trabalhar com seqüências de bolinhas e suas formas. Que tal descobrir relações entre a forma como a seqüência é construída, a quantidade de bolinhas em determinada posição e a sua posição na seqüência? *Desafio vocês a investigar e descobrir as próximas posições da seqüência!*
>
> Dê uma olhada nas duas primeiras posições da seqüência de bolinhas abaixo:



...

O grupo achou complicado? A seguir, encontram-se algumas questões para a orientação do estudo.

1. Continue a seqüência, desenhando até a 10ª posição.

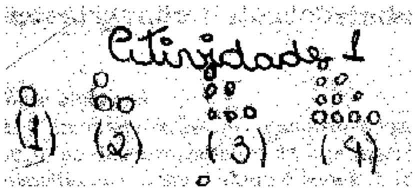
2. O grupo seria capaz de encontrar outras maneiras de continuar essa seqüência? Quais seriam?

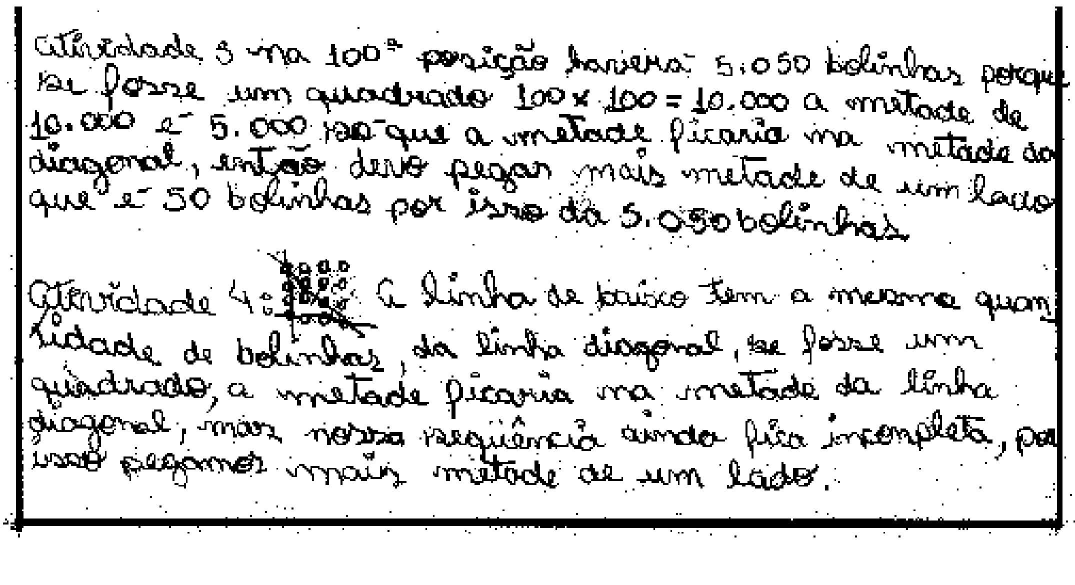
3. Se o grupo pensou em mais de um tipo de seqüência, escolha a que mais lhe agrada para encontrar um jeito de dizer por escrito como seria a sua 100ª posição. Além disso, seria capaz de dizer quantas bolinhas terá a 100ª posição?

4. Vocês conseguem agora escrever uma regra que pudesse representar o número de bolinhas ou a forma de uma posição qualquer (indefinida) da seqüência?

Em ambas as classes os alunos tiveram alguma dificuldade em iniciar a atividade investigativa. Por ser a primeira vez, foi necessário preparar uma tarefa que ainda tivesse um enunciado mais dirigido, no sentido de orientar os alunos na exploração da tarefa. Os alunos, em geral, gostaram e se envolveram na atividade, talvez pela natureza geométrica e construtiva dos padrões numéricos, os quais apresentaram uma multiplicidade de seqüências diferentes.

A título de ilustração, apresentamos a seguir uma interpretação realizada por um dos grupos, sobre o número de bolinhas da 100ª posição da seqüência, a qual, para nós, evidenciou a presença de pensamento algébrico:




Atividade 3 na 100ª posição haveria 5.050 bolinhas porque se fosse um quadrado 100 x 100 = 10.000 a metade de 10.000 é 5.000 só que a metade ficaria na metade da diagonal, então devo pegar mais metade de um lado que é 50 bolinhas por isso dá 5.050 bolinhas.

Atividade 4: a linha de baixo tem a mesma quantidade de bolinhas, da linha diagonal, se fosse um quadrado, a metade ficaria na metade da linha diagonal, mas nossa seqüência ainda fica incompleta, por isso pegamos mais metade de um lado.

Neste artigo, entretanto, nos limitaremos a analisar os indícios de formação e desenvolvimento da linguagem e do pensamento algébricos relativos que os alunos evidenciaram durante a atividade exploratório investigativa relativa á tarefa II.

A segunda tarefa proposta aos alunos

A tarefa II destinava-se a explorar relações entre grandezas variáveis com o intuito de mobilizar o pensamento algébrico dos alunos, tomando como tarefa exploratório-investigativa uma situação-problema aberta e que fugisse do tradicional seqüência-padrão.

Não foi fácil encontrar e construir tal tarefa. A idéia de explorar as máquinas operatórias ou transformativas foi sugerida por Dario e objetivada por Fernando, tendo como mediação o GdS. Eis a segunda tarefa:

Tarefa II: A Máquina Mágica

A tarefa tem como objetivos:

- Desenvolver a linguagem e o pensamento algébricos através de tarefas e atividades exploratório-investigativas, as quais visam instigá-los a fazer explorações, descobertas, conjecturas e argumentações que comprovem ou não as conjecturas. justificativas a comunicar-se e a argumentar matematicamente.
- Utilizar-se da escrita na elaboração de relatórios, além de dar significado e forma às interpretações, conjecturas, descobertas e justificativas.
- Utilizar-se da linguagem oral para relatar, socializar e justificar aos colegas as descobertas e resultados de seu grupo.
- Desenvolver a capacidade de trabalho investigativo em colaboração com os colegas.

Instruções:

Os grupos serão constituídos por 4 pessoas, de tal forma que sejam divididas as obrigações de cada um. Escolham:

- <u>Um Coordenador</u>: responsável pela organização do trabalho e pela resolução de possíveis conflitos;
- <u>Um Redator</u>: responsável pela redação final do registro a ser entregue.
- <u>Dois Relatores</u>: serão dois membros do grupo, responsáveis pela apresentação (para toda a classe) dos resultados encontrados pela equipe.

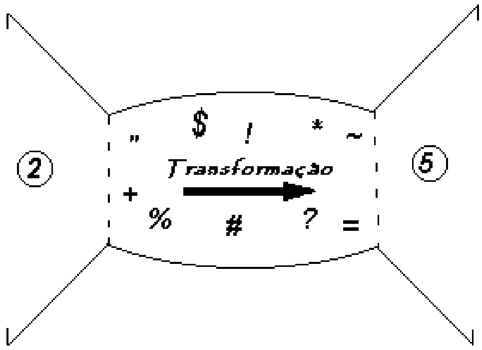
Apesar da divisão acima, **todos** deverão participar das etapas de produção do trabalho.

<u>Atenção</u>: A elaboração do relatório é de responsabilidade do grupo. Os raciocínios e estratégias utilizados devem ser anotados com detalhes. Além disso, o capricho e os cuidados em sua versão final também são critérios de avaliação.

A Tarefa:

Hoje, vocês conhecerão a *Máquina Mágica*. Ela faz transformações de números escolhidos por nós em outros números. O seu mecanismo é simples: ela faz a mesma mágica para qualquer número que passar por ela. Além disso, ela é uma máquina especial: ela não possui um segredo único, isto é, existem vários truques de transformação. *Vocês seriam capazes de descobrir as mágicas dessa máquina? Desafio vocês a descobri-las!*

A máquina é a seguinte:



O modo de operá-la é o seguinte: ao escolher o número 2, a máquina o transformou em 5. Que tal? Muito complicado? Abaixo, encontram-se algumas questões para ajudá-los no entendimento da tarefa.

1. Descubram a mágica dessa máquina e, em seguida, façam um teste para outros cinco valores. Nessa máquina, pode-se escolher números negativos para serem transformados? E o zero?
2. Como foi comentado no início, se vocês analisarem a máquina com mais atenção, encontrarão outras mágicas possíveis para ela. Anotem todas as mágicas que encontrarem. Em seguida, escolham uma dessas mágicas e testem-na para outros cinco valores.
3. Escrevam, com suas palavras, qual é a mágica feita pela máquina escolhida no item 2.
4. Com a mágica escolhida no item 2, testem para um número "x". Como ficaria o resultado? Escreva uma expressão matemática que represente o número x transformado pela máquina.

Descrevendo e analisando algumas resoluções, representações e interpretações produzidas pelos grupos em relação à Tarefa 2

Dentre as mágicas encontradas, a mais freqüente foi "somar 3". Uma das formas de representá-la matematicamente e que se tornou comum nas duas classes foi **2] + 3 [5**. Esta representação, segundo nosso ponto de vista, é uma forma de linguagem algébrica que expressa o esquema estrutural da máquina, a mágica operatória "+3" e os valores de entrada (2) e saída (5).

Outras mágicas que apareceram com certa freqüência foram:

] + 4 – 1 [
] x 4 – 3 [
] : 2 + 4 [
] x 5 – 5 [
] x 7 – 9 [
] + 23 : 5 [

Dentre os grupos que encontraram a mágica do "somar 3", alguns deles exploraram ou investigaram algumas regularidades matemáticas não previstas ou sugeridas explicitamente pela tarefa:

Produção do grupo J:

“2 + 3 = 5.
Se do lado esquerdo for par o direito vai ser impar. Exemplo:
8 + 3 = 11
4 + 3 = 7
6 + 3 = 9
Se [o lado esquerdo] for impar o lado [direito] passa a ser par e vice versa”.
(colchetes nossos).

Interlocução de Fernando com o grupo K[6]:

***F**: E aqui grupo, o que está acontecendo?*
***A**: Aqui, no primeiro, nós descobrimos que é o mais 3. Aí, nós fizemos com outros exemplos. Aí, aqui perguntava se pode ser número negativo e o número zero. Os negativos podem ser usados, só que os números negativos só serão positivos do –3 pra cima.*
***F**: Que legal!*
***A**: -3 + 3 vai dar zero. –2 + 3, um, e assim por diante... Aí aqui só será negativo do –4 pra baixo. –4 + 3 = -1. Aí o zero, também pode ser usado. O resultado na frente vai ser sempre zero (...).*

Estas duas situações evidenciam a mobilização do pensamento algébrico dos alunos e denotam o aparecimento de iniciativas investigativas por parte dos mesmos. Eles percebem regularidades intervalos de variabilidade numérica [“aqui só será negativo do –4 para baixo”], formulam conjecturas e as expressam através de uma linguagem sincopada [“os números negativos (de entrada) só serão positivos (na saída) do –3 para cima”].

A seguir, apresentamos algumas respostas dos alunos para o item 4, momento em que a tarefa propunha a exploração de uma linguagem simbólica, isto é, o número de entrada da máquina era “x”.

1) “ 8] +3 [11 ”
2) “ x] +3 [“
3) “ x] +3 = [x + 3 “
4) “Nós encontramos a adição 2 + 3 = 5, acrescentamos 3 como no início, e juntando com o 2, o resultado foi 5”.

Em (1), o grupo atribuiu um valor particular para o x, evidenciando um pensamento ainda preso à aritmética.

Em (2), interpretamos que o grupo quis dizer que, ao entrar o x, e somando 3, o resultado não pode ser determinado numericamente, pois não se sabe qual o valor de x.

[6] Para efeito de compreensão das transcrições, **F** representa a fala de Fernando, **E** a fala da professora Eliane e **A** a fala do aluno. Quando aparecer **A2**, **A3...** estamos representando a fala de outros alunos.

Esse modelo de pensamento e resposta apareceu com uma certa freqüência e denota, segundo Booth (1995), uma dificuldade típica de quem ainda não conseguiu se libertar do modo aritmético de pensar e tratar as operações. Na aritmética, o aluno habituou-se a chegar a um resultado único e bem determinado. Daí a dificuldade dos alunos, que ainda não desenvolveram o pensamento algébrico, em entender e aceitar expressões algébricas do tipo "x + 3" como uma resposta possível. Talvez isso explique porque em (1) e (4) alguns alunos contornaram o problema substituindo o "x" por um número bem determinado.

Em (3), ao contrário dos outros, os alunos demonstraram já aceitar como resposta expressões abertas. Ou seja, conseguiram encontrar e escrever uma expressão que representa a transformação do x, isto é, se entra "x" na máquina, sai dela "x + 3".

No momento de socialização das produções dos grupos, um deles apresentou um relato impreciso. Diante disto, Eliane e Fernando não poderiam perder a oportunidade de problematizar e negociar seu significado:

> ***Relatora****: Então, na atividade 3, era pra gente explicar a mágica escolhida com nossas palavras. Nessa conta, nós usamos a mágica de multiplicar por 3 e subtrair 1. Então, para qualquer número escolhido é só multiplicar por 3 e subtrair –1.*
> ***F****: Aí, você disse* ***"subtrair –1"****?*
> ***Relatora****: É...*
> ***E****: Subtrair –1... E aí, classe? O que vocês acham? É subtrair –1?*
> ***Todos****: Não!!!*
> ***A****: Ela trocou o sinal!*
> ***E****: Isso. Então, pessoal... O que seria subtrair –1?*
> *[Silêncio momentâneo... Os alunos estão a pensar]*
> ***A2****: Ah, professora! É tirar 1!*
> ***A3****: Não é, não! Subtrair –1 é fazer menos menos 1 e ... menos com menos dá mais!*
> ***E****: Ah! Quer dizer, então, que subtrair –1 é...*
> ***Alguns alunos****: Somar 1!*
> ***E****: Isso, classe! Legal!*

Nesse episódio, vimos os alunos sugerindo e colaborando com os colegas do grupo que apresentavam seus resultados e mobilizaram-se a dar sentido a uma expressão que surgiu por acaso e se constituiu em um momento de aprendizagem.

Investigando a mobilização e o desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos

A partir das resoluções e interpretações produzidos pelos alunos para o item 4 da tarefa, pudemos observar a presença e o desenvolvimento da linguagem e do pensamento algébricos dos alunos. Para facilitar a análise dessas resoluções e tomando por base o estudo de Fiorentini et al. (1993), optamos por organizá-las em três categorias, as quais encontram-se a seguir:

1ª Categoria: Aquelas que denotaram um pensamento pré-algébrico

Três grupos, dentre os vinte constituídos, denotaram a predominância de pensamento pré-algébrico ou mesmo aritmético. Dois grupos associaram o “x” ao número que supostamente representaria esta letra na seqüência do alfabeto. Um outro grupo interpretou o item 4 da seguinte forma: *“8] + 3 [11. A máquina sempre irá somar 3.”*

Podemos interpretar que, para o último grupo, se “x” representa qualquer número, o número a ser transformado, em particular, pode ser escolhido como sendo o 8. Fica evidente a dificuldade em associar “x” como sendo um número genérico qualquer. Logo, a saída encontrada pelo grupo foi reduzir a situação ao âmbito aritmético. O relatório apresentado pelo grupo parece confirmar essa hipótese, pois não aparece, em momento algum, o “x” que foi solicitado na tarefa.

2ª Categoria: Aquelas que denotaram um pensamento de transição do aritmético ao algébrico

Sete grupos mostraram alguma evidência de desenvolvimento do pensamento algébrico. Selecionamos, para análise, quatro resoluções.

O primeiro exemplo refere-se a uma justificativa em que o grupo não utilizou o valor genérico “x”, mas evidenciou alguns elementos caracterizadores do pensamento algébrico:

> *Eu pego 10]:2 + 4 [9. Se eu pego outro número não vai dar o mesmo resultado. Mas a mágica dá certo para todos os números.*

Esta explicação evidencia que o grupo percebeu um aspecto invariante (*a mágica*) em contraste com outro que varia (*outro número não vai dar o mesmo resultado*), tendo conseguido perceber e expressar a estrutura da situação, mas ainda não conseguiu encontrar uma representação genérica que sirva para qualquer número.

Outros dois grupos fizeram interpretações não esperadas por nós, em virtude daquilo que era solicitado pela tarefa. Ambos interpretaram o "x" não como variável, mas como incógnita.

Abaixo, encontram-se as interpretações:

Grupo 1

> *A letra x é pra representar um número desconhecido, por exemplo:*
> *x + 3 = 5. O x vai ser o número 2, porque o 2 + 3 = 5.*

Grupo 2

> 4. $\boxed{2} + x \boxed{5}$, Poraue todo x siaiNifica um Numero e Nesse caso o x esta substituindo o Numero 3.

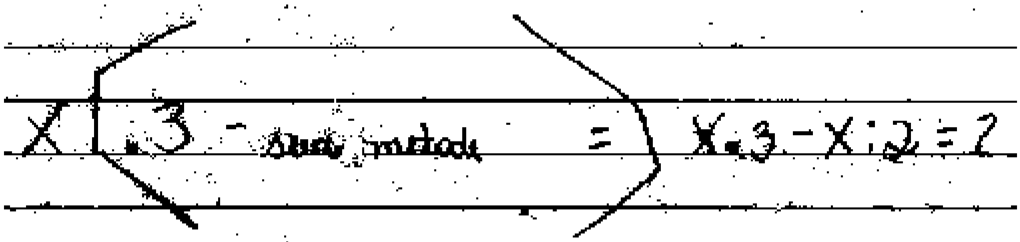
Apesar da interpretação feita, não podemos negar que há alguma manifestação de pensamento algébrico nas duas interpretações produzidas. Em ambas, foram mobilizados os conceitos de equação e de incógnita, tendo, inclusive, utilizado uma linguagem simbólica. Portanto, o que podemos dizer é que estes grupos demonstram estar ultrapassando a fase pré-algébrica.

O caráter aberto da tarefa permitiu estas diferentes interpretações, ou seja, a letra como variável ou incógnita que, avaliadas posteriormente, junto ao GdS, levou-nos a refletir sobre as potencialidades da atividade desenvolvida pelos alunos. Pelo fato dos alunos serem da sexta série e estarem entrando em contato pela primeira vez com a linguagem algébrica, não nos sentimos à vontade para problematizar, no momento da aula, as nomenclaturas e características que diferenciam as funções das equações, as diferenças entre variável e incógnita, apesar da tarefa permitir esta exploração.

3ª Categoria: Aquelas que denotaram um pensamento algébrico mais desenvolvido

Dez grupos denotaram em seus relatórios ou diálogos um pensamento algébrico mais desenvolvido, de modo que os elementos caracterizadores desse pensamento puderam ser identificados com mais facilidade. O primeiro exemplo refere-se a uma produção, onde o grupo utilizou a estrutura da máquina para explicar o que sairia dela ao transformar o x:

> *"A outra forma seria o número x . 3 – sua metade ou seja : 2.*
> *Se colocarmos o x sairia:*



Note que, ao dizer "a sua metade", o grupo poderia deixar implícito que dividiria por 2 a expressão 3x, ao invés de dividir somente o número de entrada. Devido a esta dúvida, a professora solicitou que uma das alunas do grupo explicasse como faria com outro número. Ao perceber que era realmente a metade do número escolhido e não do resultado 3x, ela instigou o grupo a pensar como poderia representar esta "metade do número x". A partir desta intervenção o grupo conseguiu construir a expressão de saída da máquina.

Outro aspecto a destacar na expressão: (x.3 – x:2 = ?) é que a interrogação foi usada como uma forma de representar genericamente o resultado variável da expressão "x.3 – x:2". Ou seja, a interrogação assume aqui a mesma forma de representação convencional da variável dependente "y", numa função.

Cinco grupos dessa categoria escolheram como mágica "multiplicar por 2,5 ou por 5/2" o número de entrada.

Um deles escreveu da seguinte forma:

> *Pegamos o x, ele entrou na máquina e fez a conta x . 2,5 = __ no final o resultado deu a armação da conta que é x . 2,5 = __ .*

Interpretamos que este grupo conseguiu uma forma de representar genericamente a estrutura funcional da máquina. Note que "__" funciona como se fosse uma representação equivalente ao convencional "y" (a variável dependente da função). Ou seja, entra "x" na máquina e sai "__" que é igual a "x .2,5".

Dos relatórios entregues, um deles deixou explícito que havia uma relação de dependência entre o número escolhido e o resultado final. A resposta dada pelo grupo no relatório foi a seguinte:

> Atividade 4:
> Escolhemos o número x dividimos por 4 e somamos por 4,5 o resultado dará número A
> O número x pode ser representado por qualque
> número e o número A depende do resultado.

O grupo usou uma linguagem sincopada e sem a utilização de uma expressão literal única para representar genericamente a situação-problema da máquina. Além disso, chegou a perceber a relação de dependência das variáveis. Durante a apresentação oral, Eliane e Fernando fizeram algumas intervenções, oportunizando um momento de negociação e argumentação de modo que o grupo e a classe chegassem, conjuntamente, a representar a mágica através da seguinte expressão matemática simbólica: $A = x/4 + 4{,}5$.

Assim, este grupo evidencia um estágio de pensamento algébrico bastante desenvolvido para alunos de 6ª série do Ensino Fundamental.

Considerações Finais

Ver os alunos produzindo matemática e vibrando com suas criações e descobertas é muito gratificante para o professor. Os alunos passam a experimentar uma outra relação com a matemática; uma relação mais prazerosa, motivadora e inquiridora, semelhante ao que experimentam os matemáticos quando criam e produzem novos conhecimentos. Uma fase que envolve o uso de intuição e criatividade na exploração de idéias e na formulação de conjecturas. Fase em que o formalismo e o rigor ainda não estão fortemente presentes.

A análise da experiência de ensino desenvolvida através de tarefas exploratório-investigativas mostra que este é um contexto rico de mobilização e desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos. Foi visível o salto qualitativo do pensamento algébrico dos alunos da tarefa I para a II. Mas, o mais importante de tudo, é que a metade dos grupos conseguiu chegar, em apenas duas tarefas, a um estágio bastante satisfatório de desenvolvimento de um pensamento tipicamente algébrico, embora nem sempre sob uma linguagem estritamente simbólica. Mas, à medida que esse pensamento desenvolve-se, o aluno, para poder representá-lo como quantidade variável dentro de um campo de variação, sente necessidade de utilizar linguagens mais apropriadas como é o caso da simbólica. E, ao se apropriar dessa linguagem, seu pensamento flui melhor, conseguindo expressar relações mais complexas e abstratas.

Embora tenhamos, neste estudo, mostrado as potencialidades pedagógicas das IM para o desenvolvimento da linguagem e do pensamento algébricos, convém destacar algumas dificuldades para sua inclusão na prática escolar. A primeira delas é o número de alunos em classe[7]. Mesmo contando com dois docentes em classe, um deles tinha, também, a função de coletar informações, fazer registros escritos ou gravação em áudio e vídeo das atividades realizadas em classe. A experiência nos mostrou o quanto é fundamental o papel mediador ou orientador do professor junto aos grupos. Diríamos que o sucesso da tarefa II deveu-se mais ao papel mediador dos dois formadores do que, propriamente, a potencialidade exploratório-investigativa da tarefa.

Uma segunda dificuldade é a elaboração de tarefas autenticamente investigativas para o campo da álgebra elementar de modo que estas possam contemplar e problematizar os aspectos caracterizadores do pensamento algébrico. Esta dificuldade, entretanto, fica bastante reduzida se incluirmos o estudo das grandezas variáveis, isto é, se ligarmos a álgebra ao estudo das funções, ainda que num nível elementar. A literatura relativa ao currículo escolar do ensino da matemática, salvo algumas exceções, ainda continua separando o ensino da álgebra elementar do ensino das funções, entendendo que o estudo da álgebra deve preceder o de funções. Nós questionamos esta ordem seqüencial, pois, se um dos conceitos fundamentais da álgebra é o de variável, como explorá-lo e desenvolvê-lo sem o estudo concomitante das funções?

Além disso, o conceito de incógnita ou de número genérico é representativo de situações ou formas estáticas, enquanto que a noção de variável é representativa de situações de movimento, de variação, de fluência, isto é, algo mais próximo ao próprio movimento do mundo, da vida e do próprio pensamento. Sousa (2004), com base de Bento de Jesus Caraça, entende que “a variável, enquanto conceito, representa o

[7] As duas classes em que foram desenvolvidas as IM possuíam em torno de 40 alunos cada uma. Mesmo dividindo cada classe em dez grupos, contendo cada um quatro alunos e tendo cada grupo um roteiro de trabalho cuidadosamente elaborado, foi difícil atender a todos com a atenção e a orientação necessárias.

pensamento concreto do conteúdo abstrato da lei universal do movimento do pensamento matemático, que contém em seu fluxo as diversas álgebras" (p. 82).

Outro problema recorrente é o tempo disponível para a realização de IM em sala de aula. Esse é o vilão de todo professor que prepara uma tarefa e determina um tempo limitado para seu desenvolvimento em classe. Vimos que o planejamento é importante, todavia, interromper ou apressar a produção dos alunos pode representar um retrocesso e uma ameaça a uma efetiva inclusão das investigações matemáticas no currículo escolar.

Em relação às dificuldades apresentadas pelos alunos, destacamos: o estranhamento inicial em trabalhar com investigações matemáticas; a organização e registro dos resultados obtidos com a investigação, ou seja, a produção do relatório[8]; a socialização e discussão/negociação dos resultados com toda a classe[9].

Sobre o problema da indisciplina no contexto de aulas investigativas, é preciso, primeiramente, re-conceituá-la, pois os alunos quando estão investigando, principalmente em uma sala de 40 alunos, agem como as abelhas que produzem mel. Todos querem falar e colocar suas idéias e interpretações e defender seus pontos de vista em relação às tarefas e suas conjecturas. Esse processo produtivo pode parecer bagunça aos olhos de quem está de fora, mas, para quem está acompanhando o que efetivamente acontece em classe, este é um modo disciplinado de estudar e produzir conhecimento, respeitando a heterogeneidade da classe, principalmente as múltiplas significações que emergem.

Em síntese, o estudo por nós desenvolvido, apresenta indícios de que o desenvolvimento de Investigações Matemáticas em sala de aula representa um contexto rico e desafiador de aprendizagem tanto para o aluno quanto para o professor. Para o aluno porque este passa a constituir-se em sujeito de conhecimento, isto é, alguém que sente o prazer de participar da produção/criação das idéias matemáticas. Para o professor porque pode encontrar nas Investigações Matemáticas um modo significativo de ensinar, compreender, trabalhar e estabelecer relação com a Matemática, levando os alunos a se interessarem pelas aulas de álgebra, fato pouco comum, atualmente, em nossas escolas, como evidenciam os seguintes depoimentos:

---

[8] Os alunos geralmente não estão acostumados em registrar por escrito seus pensamentos e justificativas matemáticas. Esta, entretanto, não foi uma dificuldade muito presente nas classes investigadas, pois a professora Eliane tinha o hábito de solicitar registros escritos de seus alunos.

"… eu fiz algumas aulas com o professor Fernando foi D + que pena que você não aprendeu ainda. Essas aulas investigativas me fez gostar mais de matemática coisa que eu não gostava agora estou amando essa matéria."(Aluna da 6ª A, em trecho de carta enviada para sua colega Érica).

"Sim, porque aprendemos coisas novas de um jeito diferente, e compartilhar com os meus colegas".(Aluno da 6ª B, respondendo se gostaria de ter com mais freqüência esse tipo de atividade).

Referências

Booth, Lesley. (1995) Dificuldades das crianças que se iniciam em álgebra. In: A. Coxford, & A. Shulte,A. (Org.). *As idéias da álgebra*. São Paulo: Atual.

Castro, J. F. *(2004). Um estudo sobre a própria prática em um contexto de aulas investigativas de Matemática*. 197 p. Dissertação (Mestrado em Educação: Educação Matemática). Campinas: FE/Unicamp.

Fiorentini, D., Miorim, M. A. & Miguel, A. (1993). Contribuição para um Repensar... a Educação Algébrica Elementar, In: *Pro-Posições*, Revista Quadrimestral da Faculdade de Educação – Unicamp. Vol. 4, nº 1 [10]. Campinas: Cortez Editora, p.78-91.

Fiorentini, D. & Miorim, M. A. (1993). Algumas concepções de educação algébrica: fundamentos para repensar o ensino da matemática elementar. *Anais do III Encontro Paulista de Educação Matemática*. p. 29-35. Bauru: SBEM-SP.

Milton, K. (1989). Fostering algebraic thinking in children. *The Australian Mathematics Teacher*, 45 (4): 14-16.

Ponte, J.P. (2003). Investigar, Ensinar e Aprender. *Actas do ProfMat*, (CD-ROOM, p. 25-39). Lisboa: APM.

Ponte, J. P.; Brocado, J. & Oliveira, H. (2003). *Investigações Matemáticas na Sala de Aula*. Belo Horizonte: Autêntica, 149p.

Socas, M.M. et al. (1996). *Iniciación al Álgebra*. Madrid: Editorial Síntesis.

SOUSA, M. C. (2004). O ensino de álgebra numa perspectiva lógico-histórica: um estudo das elaborações correlatas de professores do Ensino Fundamental. 286 p. Tese (Doutorado em Educação: Educação Matemática). Campinas: FE/Unicamp.

Vygotsky, L.S. *Pensamento e Linguagem*. São Paulo: Martins Fontes, 1993.

[9] Para evitar a socialização de resultados parecidos ou repetitivos na fase final de uma IM, João Pedro da Ponte, em um Seminário realizado na Unicamp, sugeriu reduzir o número de grupos que apresentarão seus resultados, procurando alterná-los de uma tarefa para outra.